

具奇性 Helmholtz 型问题谱逼近^①

许 传 炬

(厦门大学数学系 厦门 361005)

摘要 考虑具奇性 Helmholtz 型边值问题的高阶数值逼近. 通过引进虚边界并确定虚边界处的边界条件, 获得除奇点小领域外的区域内问题的准确表述, 并进一步证明此问题的谱逼近解具有优化的误差估计.

关键词 Helmholtz 方程, 奇性, 人工边界, 谱方法

中国图书分类号 O 241.82 O 175.23

谱方法以具谱精度而受重视. 然而象大多数数值解法一样, 谱方法对奇性解的逼近无法得到满意的结果. 办法之一是通过引进一个人工边界将奇异点与其余点分离, 然后推导出人工边界处解应满足的关系式, 利用它构造光滑区域内解的逼近格式, 这样奇性对光滑区域内数值求解过程不产生直接影响, 通常的数值方法便可得到应用. 文[1]利用 Green's 函数给出人工边界上边界条件的一般形式, 并用有限元法获得精确的数值结果. 文[2]从理论上证明了此种逼近的误差精度, 但边界条件以解的二阶导数的形式出现, 给理论分析和数值计算带来不便. 本文继续这方面的工作, 给出更简单更自然的人工边界条件, 并证明基于此种边界条件的谱方法逼近具有正则问题谱逼近所具有的谱精度.

1 人工边界上的边界条件

考虑 Helmholtz 型边值问题

$$\begin{cases} \alpha u - \Delta u = f & \Omega \\ u = g & \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

这里 α 为非负常数, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, Ω 是 R^2 上的一有界区域. 当 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 有尖点时, 问题(1)的解可能产生奇性. 为简单起见, 假设 Ω 只有一个奇异点 O , 位于原点处 (见图 1). 以 O 为中心在 Ω 内做一条半径为 R 的圆弧 Γ_s , 将 Ω 分成两部分, 包含奇点 O 的扇形状区域记 Ω_s , 不包含奇性的区域记为 Ω_r . 在 Ω_r 内问题(1)的解不包含任何奇性, 因此标准的谱方法非常适

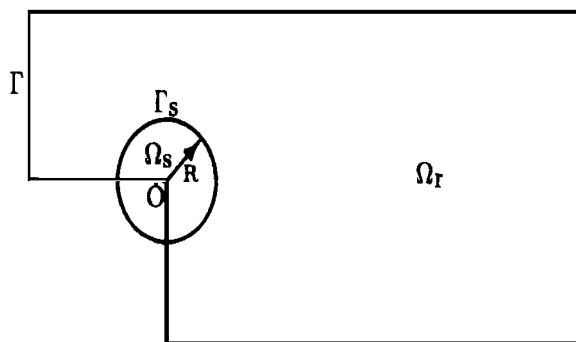


图 1 区域模型

Fig. 1 Model of domain

合于它的数值求解.

首先推导 (1) 的解在人工边界 Γ_s 上应满足的关系式. 为此假设 f 的支集包含在子区域 Ω 内, g 的支集包含在 $\partial\Omega \setminus \Omega_s$ 内. 不难推导^[4] 问题 (1) 的解在 Ω 内可表示成如下形式

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n B_n(r) \sin\left(\frac{n\theta}{\omega}\right) \quad (2)$$

这里 $a_n (n=0, 1, 2, \dots)$ 是常数, (r, θ) 表示极坐标, $\omega\pi$ 是奇点 O 的内角, $B_n(r)$ 取

$$B_n(r) = \begin{cases} r^{n/\omega} & \alpha = 0, \\ \frac{(r^\alpha)^{2k+n/\omega}}{2^{2k+n/\omega} k! \Gamma(k+1+n/\omega)} & \alpha > 0. \end{cases}$$

这里 $\Gamma(\cdot)$ 表示 Gamma 函数. 由 (2) 得

$$a_n = \frac{2}{\omega\pi B_n(R)} \int_0^{\omega\pi} u(R, \theta) \sin\left(\frac{n\theta}{\omega}\right) d\theta \quad (3)$$

在式 (2) 中对 r 求导并在 $r=R$ 处取值

$$\frac{\partial}{\partial r} u(R, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n B'_n(R) \sin\left(\frac{n\theta}{\omega}\right) \quad (4)$$

利用式 (3) 有

$$\frac{\partial}{\partial r} u(R, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2B'_n(R)}{\omega\pi B_n(R)} \int_0^{\omega\pi} u(R, \varphi) \sin\left(\frac{n\varphi}{\omega}\right) \sin\left(\frac{n\theta}{\omega}\right) d\varphi$$

记 n 为子区域 Ω 在 Γ_s 上的单位外法向量, 显然

$$\frac{\partial}{\partial n} u(R, \theta) = - \frac{\partial}{\partial r} u(R, \theta),$$

由此获得 Ω 内问题 (1) 的 Neumann 型边界条件

$$\frac{\partial}{\partial n} u(R, \theta) = -h(\theta) \quad (5)$$

$$\text{这里 } h(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2B'_n(R)}{\omega\pi B_n(R)} \int_0^{\omega\pi} u(R, \varphi) \sin\left(\frac{n\varphi}{\omega}\right) \sin\left(\frac{n\theta}{\omega}\right) d\varphi \quad (6)$$

2 Ω 区域上的正则问题及其逼近

现在考虑 Ω 区域上的 Dirichlet-Neumann 混合型边值问题

$$\begin{cases} \alpha u - \Delta u = f & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \setminus \Gamma_s \\ \frac{\partial u}{\partial n} = -h & \Gamma_s \end{cases} \quad (7)$$

为叙述方便, 我们已经假设 $g=0$. 引进 Sobolev 空间 $V = \{v \in H^1(\Omega); v|_{\partial\Omega \setminus \Gamma_s} = 0\}$, 那么问题 (7) 等价于下面的变分问题: 求 $u \in V$, 使得

$$a(u, v) + b(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V \quad (8)$$

这里 $(f, v) = \int_{\Omega} f v dx$, $a(u, v) = \alpha(u, v) + (\nabla u, \nabla v)$, $b(u, v) = \int_0^{\omega\pi} h(\theta) v(R, \theta) R d\theta$

定理 1 变分问题 (8) 存在唯一解.

证 直接利用 Lax-Milgram 定理, 只需验证 (8) 左边的双线性形式 $a+b$ 的连续性和强制性. 形式 a 在 $V \times V$ 上的连续性和强制性显然, 现在证明存在常数 C 使得

$$b(v, v) = 0 \quad \forall v \in V. \quad (10)$$

给定 $u, v \in V$, 将 $u(R, \theta), v(R, \theta)$ 展开成

$$u(R, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \sin\left(\frac{n\theta}{\omega}\right), \quad v(R, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \sin\left(\frac{n\theta}{\omega}\right)$$

那么由 $b(u, v)$ 的定义得

$$\begin{aligned} b(u, v) &= \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2RB_n(R)}{\omega B_n(R)} \int_0^{2\pi} u(R, \varphi) \sin\left(\frac{n\varphi}{\omega}\right) \sin\left(\frac{n\theta}{\omega}\right) v(R, \theta) d\varphi d\theta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2RB_n(R)}{\omega B_n(R)} \frac{\omega \pi}{2} \beta_n \frac{\omega \pi}{2} \gamma_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R\omega \pi}{2} \frac{B_n(R)}{B_n(R)} \beta_n \gamma_n \end{aligned}$$

这里, 因子 R 的出现源于关系式: 弧长 $ds = R d\varphi$

当 $\alpha = 0$ 时, $B_n(R) = \frac{n}{\omega R} B_n(R)$;

当 $\alpha > 0$ 时, 利用 Gamma 函数的性质 $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, 得

$$\begin{aligned} B_n(R) &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha \frac{(2k+n/\omega)(\alpha R)^{2k+n/\omega-1}}{2^{2k+n/\omega} k! \Gamma(k+1+n/\omega)} \\ &= \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k(\alpha R)^{2k+n/\omega-1}}{2^{2k+n/\omega} k! \Gamma(k+1+n/\omega)} + \frac{\alpha n}{\omega} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha R)^{2k+n/\omega-1}}{2^{2k+n/\omega} k! \Gamma(k+1+n/\omega)} \\ &= \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k(\alpha R)^{2(k-1)+n/\omega-1}}{k(k+n/\omega) 2^{2k+n/\omega} (k-1)! \Gamma(k-1+1+n/\omega)} \\ &\quad + \frac{\alpha n}{\omega} \frac{1}{\alpha R} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha R)^{2k+n/\omega}}{2^{2k+n/\omega} k! \Gamma(k+1+n/\omega)} \\ &= \alpha \frac{2\alpha R}{4(1+n/\omega)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha R)^{2(k-1)+n/\omega-1}}{2^{2k-2+n/\omega} (k-1)! \Gamma(k-1+1+n/\omega)} + \frac{n}{\omega R} B_n(R) \\ &= \left(\frac{\alpha^2 R^2 \omega^2}{2n(\omega+n)} + 1 \right) \frac{n}{\omega R} B_n(R) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{因此 } b(u, v) &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{\alpha^2 R^2 \omega^2}{2n(\omega+n)} + 1 \right) \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \gamma_n = C \left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^2 \right)^{1/2} \\ &= C \|u\|_{1/2, \Gamma_s} \|v\|_{1/2, \Gamma_s} = C \|u\|_{1, \Omega_T} \|v\|_{1, \Omega_T}. \end{aligned}$$

另一方面, $\forall v \in V$,

$$b(v, v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2RB_n(R)}{\omega B_n(R)} \left(\int_0^{2\pi} v(R, \theta) \sin\left(\frac{n\theta}{\omega}\right) d\theta \right)^2 = 0,$$

(9)、(10) 两式成立. 证毕.

考虑问题 (7) 的逼近问题:

$$\begin{cases} \alpha u^M - \Delta u^M = f & \Omega \\ u^M = 0 & \partial\Omega \setminus \Gamma_s \\ \frac{\partial u^M}{\partial n} = -h_M & \Gamma_s \end{cases} \quad (11)$$

这里 h_M 是 (6) 中定义的 h 的一个截断逼近函数,

$$h_M = \sum_{n=0}^M \frac{2B_n(R)}{\omega B_n(R)} \int_0^{2\pi} u^M(R, \varphi) \sin\left(\frac{n\varphi}{\omega}\right) \sin\left(\frac{n\theta}{\omega}\right) d\varphi$$

问题 (11) 对应的变分形式是: 求 $u^M \in V$, 使得

$$a(u^M, v) + b(u^M, v) = (f, v) \quad \forall v \in V \quad (12)$$

这里 $b^M(u^M, v) = \int_0^{\omega\pi} h^M(\theta) v(R, \theta) R d\theta$.

定理 2 问题(12)存在唯一解; 设 $\Gamma_0 \subset \Omega$ 是以原点为中心半径为 R_0 的圆弧, $R_0 > R$, 设问题(8)的解 u 满足 $u(R_0, \theta) = H^{s+1/2}(\Gamma_0)$, $s > 0$, 那么问题(12)的解 u^M 满足下面的误差估计

$$\|u - u^M\|_{1, \Omega_r} \leq C \left(\frac{R}{R_0}\right)^{\frac{M+1}{\omega}} \frac{1}{M^s} \|u\|_{s+1/2, \Gamma_0} \quad (13)$$

这里 C 是与 M 和 R 无关的常数.

证 问题(12)的存在唯一性证明完全类似于定理 1, 我们只证明估计式(13). 为此将式(8)减式(12)得

$$a(u - u^M, v) + b^M(u - u^M, v) = b^M(u, v) - b(u, v) \quad \forall v \in V$$

对于任意 $v \in V$, 将 v 展开成

$$v(R, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \sin\left(\frac{n\theta}{\omega}\right), \text{ 而 } u \text{ 可写成}$$

$$u(R, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n B_n(R) \sin\left(\frac{n\theta}{\omega}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{因此 } b^M(u, v) - b(u, v) &= \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{2RB_n(R)}{\omega\pi B_n(R)} \int_0^{\omega\pi} \int_0^{\omega\pi} u(R, \theta) \sin\left(\frac{n\theta}{\omega}\right) v(R, \varphi) \sin\left(\frac{n\varphi}{\omega}\right) d\theta d\varphi \\ &= \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{2RB_n(R)}{\omega\pi B_n(R)} \frac{\omega\pi}{2} a_n B_n(R) \frac{\omega\pi}{2} \gamma_n \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{\alpha^2 R^2 \omega^2}{2M(\omega + M)} + 1 \right) \sum_{n=M+1}^{\infty} n a_n B_n(R) \gamma_n \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{\alpha^2 R_0^2 \omega^2}{2M(\omega + M)} + 1 \right) \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{B_n(R)}{B_n(R_0)} n^{-s} n^{s+1} a_n B_n(R_0) \gamma_n \\ &\leq C \left(\frac{R}{R_0}\right)^{\frac{M+1}{\omega}} (M+1)^{-s} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n^{s+1/2})^2 a_n^2 B_n^2(R_0) \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} n \gamma_n^2 \right)^{1/2} \\ &= C \left(\frac{R}{R_0}\right)^{\frac{M+1}{\omega}} \frac{1}{(M+1)^s} \|u\|_{s+1/2, \Gamma_0} \|v\|_{1/2, \Gamma_s}. \end{aligned}$$

在倒数第二行的推导中利用了估计式

$$\frac{B_n(R)}{B_n(R_0)} = \left(\frac{R}{R_0}\right)^{\frac{n}{\omega}} \frac{\bar{b}_k(R)}{\bar{b}_k(R_0)}$$

这里 $\bar{b}_k(R) = \frac{(\alpha R)^{2k}}{2^{2k+n/\omega} k! \Gamma(k+1+n/\omega)}$. 显然 $\bar{b}_k(R)$ 关于 R 是单调递增函数, 因此 $\bar{b}_k(R) < \bar{b}_k(R_0)$, 由此得 $\frac{B_n(R)}{B_n(R_0)} < \left(\frac{R}{R_0}\right)^{\frac{n}{\omega}}$.

最后取 $v = u - u^M$, 并利用以上估计得

$$\|u - u^M\|_{1, \Omega_r}^2 \leq C \left(\frac{R}{R_0}\right)^{\frac{M+1}{\omega}} \frac{1}{M^s} \|u - u^M\|_{s+1/2, \Gamma_0} \|u - u^M\|_{1, \Omega_r}$$

式(13)得证. 证毕.

3 谱元逼近

设 $\Omega, k=1, 2, \dots, K$, 是 Ω 的四边形剖分, 满足 $\Omega = \bigcup_{k=1}^K \Omega_k, \Omega_k \cap \Omega_l = \emptyset, \forall k, l=1, \dots, K, k \neq l$.

1. 设剖分是一致的, 即两个相邻四边形的交或者是一整条边或者是一顶点 (见图 2). 最后出于技巧性需要, 设四边形剖分将人工边界 Γ_s 等距分割成 K 段. 令 F_k 是参考区域 $[-1, +1]^2$ 到 Ω 的一一光滑映射. 设 $F_k(F_k^{-1})$ 的 Jacobi J_k (分别地 J_k) 大于某一正常数, 且 F_k 和 F_l 在 $\Omega \setminus \Omega$ 处的限制相耦合.

定义谱元离散空间

$$V_N = \{v \in H^1(\Omega), v|_{\partial\Omega \setminus \Gamma_s} = 0, v|_{\Omega_k} \in P_N(\cdot), k=1, \dots, K\}.$$

考虑问题 (12) 的谱元离散: 求 u_N^M 使得

$$a_N(u_N^M, v) + b_N^M(u_N^M, v) = (f, v)_N \quad \forall v \in V_N \quad (14)$$

这里 $(f, v)_N = \sum_{k=0}^K \sum_{i,j=0}^N f(\xi_{ij}) v(\xi_{ij}) J_k(\omega_j)$

$$a_N(u_N^M, v) = \alpha(u_N^M, v)_N + (\dot{y} u_N^M, \dot{y} v)_N,$$

$$b_N^M(u_N^M, v) = \sum_{n=0}^M \frac{2RB_n(R)}{\omega\pi B_n(R)} \left(\sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^N u_N^M(R, \eta_l^k) \sin\left(\frac{n\eta_l^k}{\omega}\right) \rho_l^k \right) \left(\sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^N v(R, \eta_l^k) \sin\left(\frac{n\eta_l^k}{\omega}\right) \rho_l^k \right).$$

其中, ξ_{ij}, ω 分别表示参考区域上的 Gauss-Lobatto 点及其对应的权, η_l^k, ρ_l^k 分别表示与人工边界 Γ_s 有公共边的子区域 Ω_k 在公共边上的 Gauss-Lobatto 点和对应的权, $\sum_{k=0}^K$ 表示对有一边在 Γ_s 上的那些子区域 Ω_k 求和.

注 1 在 $b_N^M(u_N^M, v)$ 的定义中直接使用了子区域 Ω_k 在 Γ_s 上的网格点 η_l^k 及其对应的权 ρ_l^k , 这与使用参考区域在其边界上的网格点及其对应的权再通过映射 F_k 和 Jacobi J_k 来定义是等价的.

为了推导问题 (14) 的解 u_N^M 的误差界, 我们利用下面的标准结果^[3].

引理 1 存在一个独立于 N 的常数 C , 使得

$$\|u^M - u_N^M\|_{1, \Omega_r} \leq C \left[\inf_{w \in V_N} \left\{ \|u^M - w\|_{1, \Omega_r} + \sup_{v \in V_N} \frac{a(u^M, v) - a_N(w, v)}{v|_{1, \Omega_r}} + \sup_{v \in V_N} \frac{b^M(u^M, v) - b_N^M(w, v)}{v|_{1, \Omega_r}} \right\} + \sup_{v \in V_N} \frac{(f, v) - (f, v)_N}{v|_{1, \Omega_r}} \right] \quad (15)$$

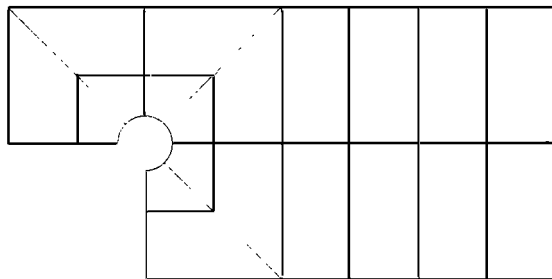


图 2 谱元区域剖分

Fig. 2 Spectral elements decomposition

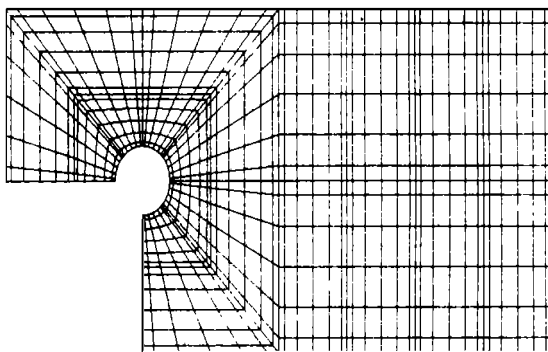


图 3 谱元网络

Fig. 3 Spectral elements Gauss-Lobatto mesh

现在逐项估计上式右边各项. 首先考虑第一项, 设 $u \in H^{s+1}(\Omega)$, 则

$$\inf_{w \in V_N} \|u^M - w\|_{1, \Omega_r} = \inf_{w \in V_N} \|u - w\|_{1, \Omega_r} + \|u - u^M\|_{1, \Omega_r} \\ \leq C N^{-s} \|u\|_{s+1, \Omega_r} + \|u - u^M\|_{1, \Omega_r}. \quad (16)$$

第二项可由标准的椭圆算子估计推导其界,

$$\inf_{w \in V_N} \sup_{v \in V_N} \frac{a(u^M, v) - a_N(w, v)}{\|v\|_{1, \Omega_r}} \leq C N^{-s} \|u\|_{s+1, \Omega_r} + \|u - u^M\|_{1, \Omega_r}. \quad (17)$$

这里 C 与 α, J_k 有关. 而最后一项有如下估计^[3],

$$\sup_{v \in V_N} \frac{(f, v) - (f, v)_N}{\|v\|_{1, \Omega_r}} \leq C N^{-\mu} \|f\|_{\mu, \Omega_r} \leq C N^{-\mu} \|f\|_{\mu, \Omega_r} \quad (18)$$

最后估计第三项. 对任意 $w \in V_N, v \in V_N$ 和实数 $s \geq 0$, 则有

$$b^M(u^M, v) - b_N^M(w, v) = b^M(u^M - u, v) + b^M(u, v) - b_N^M(w, v)$$

利用定理 2 的证明技巧不难证明

$$b^M(u^M - u, v) \leq C \|u^M - u\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_r} \|v\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_s} \leq C \|u^M - u\|_{1, \Omega_r} \|v\|_{1, \Omega_r}. \quad (19)$$

另一方面, 由于

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \theta) \sin\left(\frac{n\theta}{\omega}\right) v(R, \varphi) \sin\left(\frac{n\varphi}{\omega}\right) d\theta d\varphi \\ &= \left(\sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^N w(R, \eta_l^k) \sin\left(\frac{n\eta_l^k}{\omega}\right) \rho_l^k \right) \left(\sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^N v(R, \eta_l^k) \sin\left(\frac{n\eta_l^k}{\omega}\right) \rho_l^k \right) \\ &= \int_0^{2\pi} u(R, \theta) \sin\left(\frac{n\theta}{\omega}\right) d\theta - \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^N w(R, \eta_l^k) \sin\left(\frac{n\eta_l^k}{\omega}\right) \rho_l^k \int_0^{2\pi} v(R, \varphi) \sin\left(\frac{n\varphi}{\omega}\right) d\varphi \\ &+ \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^N w(R, \eta_l^k) \sin\left(\frac{n\eta_l^k}{\omega}\right) \rho_l^k \int_0^{2\pi} v(R, \varphi) \sin\left(\frac{n\varphi}{\omega}\right) d\varphi - \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^N v(R, \eta_l^k) \sin\left(\frac{n\eta_l^k}{\omega}\right) \rho_l^k \\ &\leq C(KN)^{-1} \|u(R, \theta) - w(R, \theta)\|_{1, \Gamma_s} \|v(R, \varphi)\|_{0, \Gamma_s} \\ &+ C \|w(R, \theta)\|_{0, \Gamma_s} (KN)^{-s} \left\| \sin\left(\frac{n\varphi}{\omega}\right) \right\|_{s, \Gamma_s} \|v(R, \varphi)\|_{0, \Gamma_s} \\ &\leq C \left(\frac{KN}{n}\right)^{-1} \|u(R, \theta) - w(R, \theta)\|_{1, \Gamma_s} \|v(R, \varphi)\|_{1, \Omega_r} \\ &+ C \left(\frac{KN}{n}\right)^{-s} \|u(R, \theta)\|_{0, \Gamma_s} \|v(R, \varphi)\|_{\Omega} \end{aligned}$$

取 $w \in V_N$ 使得

$$\|u(R, \theta) - w(R, \theta)\|_{1, \Gamma_s} \leq C N^{-s+1} \|u(R, \theta)\|_{s, \Gamma_s} \leq C N^{-s+1} \|u\|_{s+1, \Omega_r},$$

$$\text{那么 } b^M(u, v) - b_N^M(w, v) \leq \sum_{n=0}^M C \frac{2R}{\omega \pi R \omega} \frac{n}{n} \left[\left(\frac{KN}{n}\right)^{-1} N^{-s} + \left(\frac{KN}{n}\right)^{-s} N^{-s} \right] \|u\|_{s+1, \Omega_r} \\ \leq C(M, K) N^{-s} \|u\|_{s+1, \Omega_r} \quad (20)$$

这里 $C(M, K)$ 是与 M, K 有关而与 N 无关的常数. 结合 (15) ~ (20) 以及式 (13), 我们得到下面的定理.

定理 3 设问题 (8) 的解 u 满足 $u \in H^{s+1}(\Omega), s > 0$, 那么问题 (14) 的解 u_N^M 满足下而的误差估计

$$\|u - u_N^M\|_{1, \Omega_r} \leq C \left(\frac{R}{K_0}\right)^{\frac{M+1}{2}} \frac{1}{M} \|u\|_{s+1, \Omega_r} + C(M, K) N^{-s} \|u\|_{s+1, \Omega_r} + C N^{-\mu} \|f\|_{\mu, \Omega_r}$$

这里 R_0, Γ_0 如定理 2 中定义, $\mu > 0$.

4 数值结果

计算区域如图 2、3. 考虑下面的 Laplace 方程

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = g|_{\partial\Omega} \end{cases} \quad (21)$$

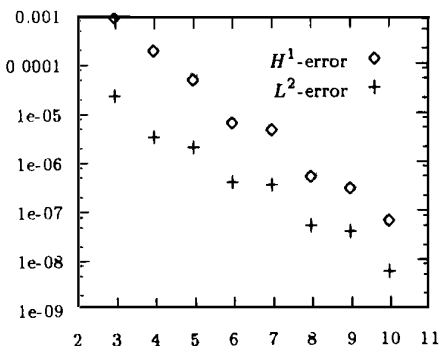


图 4 误差 $u - u_N^M$ 和 $u - u_N^M$ 随多项式阶数的变化

Fig. 4 A plot of the residual $u - u_N^M$ and $u - u_N^M$ as a function of the polynomial degrees N

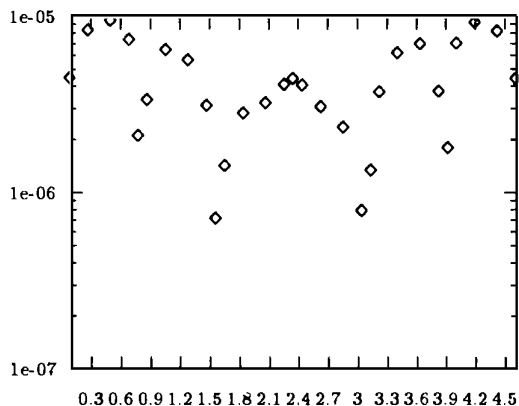


图 5 网格点上的误差在人工边界上的分布

Fig. 5 A plot of the pointwise residual as a function of θ along the artificial boundary

这里 $g(r, \theta) = r^{\frac{2}{3}} \sin(\frac{2}{3}\theta)$ 是问题(21)的准确解. 显然解函数 g 在原点 O 关于 r 的导数有奇性. 由于问题的解仅有一个低频谱, 可以期望人工边界条件 h_M 取小的 M 即可达到好的逼近效果. 事实也如此, 在下面的数值试验中取 $M=2$. 研究谱逼近解关于多项式阶数 N 的逼近精度. 图 4 显示 $L^2(\Omega)$ -误差和 $H^1(\Omega)$ -误差随 N 的变化情况, 可以看到随着 N 的增加, 误差成指数下降. 图 5 给出当 $N=5$ 时逼近解在人工边界 Γ_s 上的点误差曲线.

从上面的分析可得如下结论, 通过构造合适的人工边界条件, 并借此将奇性问题转化成无奇性问题, 高阶谱方法可用来求得高精度的数值解.

参 考 文 献

- 1 Givoli D, Rivkin L, Keller J B. A finite element method for domains with corners. *Int. J. Numer. Meth. Engi.*, 1992, 35: 1 329 ~ 1 345
- 2 Han H, Wu X. The approximation of the exact boundary conditions at an artificial boundary of linear elastic equations and its application. *Math. Comp.*, 1992, 59: 21 ~ 37
- 3 Maday Y, Ronquist E M. Optimal error analysis of spectral methods with emphasis on non-constant coefficients and deformed geometries. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 1990, 80: 91 ~ 115
- 4 郭友中, 李维溪. 数学物理方法. 武汉: 武汉大学出版社, 1993

A Spectral Element Method for Helmholtz Type Equations with Singularities

Xu Chuanju

(Dept. of Math., Xiamen Univ., Xiamen 361005)

Abstract A Spectral element approximation for Helmholtz type problems with singularities is presented. Exact formulation is derived in the subdomain excluding from singularities, via introducing an artificial boundary and constructing appropriate artificial boundary conditions. Optimal spectral accuracy is obtained.

Key words Helmholtz type equations, Singularity, Artificial boundary, Spectral methods